Mécanique du Solide

Chapitre 4 :
ENERTIE DES SOLIDES
(Ou géométrie des masses)

Cycle préparatoire
Semestre: S3

2016/2017

Pr. Chaabelasri

Département Génie Civil, ENSA d'Al-Hociema

Introduction

Inertie : La masse inertielle *m* d'une particule est la mesure de son inertie de translation. Elle représente l'opposition qu'offre un corps à voir changer son état de mouvement de translation.

Moment d'inertie En rotation, c'est le *moment d'inertie I* d'un système qui représente la mesure de l'opposition qu'offre ce système à voir changer son état de mouvement de rotation autour d'un axe.

La dynamique des solides (Chapitre suivant) relie d'une part :

Des éléments de la cénitique (Chapitre suivant) : Quantité de mouvement, Moment cénitique et Moment dynamique.

Avec :

Les forces, les moments qui s'éxercent sur le système.

Dans cette lumière la cénitique introduit des grandeurs d'inertie : Masse d'inértie, contre d'inertie, et moment d'inertie.

Introduction

Afin de comprendre et de pouvoir décrire les mouvements des systèmes matériels, il est important de connaître la répartition géométrique afin de se préparer aux concepts de cinétiques et dynamiques des solides.

L'intérêt de cette partie est de nous permettre de connaître un certain nombre de données sur la répartition des masses des systèmes. Nous, nous intéresserons à la détermination :

- des centres de masse du solide

- des moments d'inertie, des produits d'inertie par rapport à des axes et aux tenseurs d'inertie des solides quelconques dans différents repères.

L'opérateur d'inertie sert à caractériser la répartition des masses d'un solide, afin d'étudier par la suite, un mouvement quelconque de celui-ci.

I - DISTRUBITION DE LA MASSE AU SEIN D'UN SOLIDE

A chaque système matériel (S) est associé, une quantité scalaire positive invariable en mécanique classique, appelée : **masse du système**.

La masse d'un solide est la quantité de matière contenue dans le volume de ce solide.

Cet invariant scalaire obéit aux propriétés mathématiques suivantes :

Aditivité des masses

Soit un solide (*S*) de masse *m*, et *M* un point de (*S*). L'élément qui entoure *M* a une masse *dm*, de telle façon que :

Système continu $$m = \int_{(S)} dm$$

Système discret $$m = \sum_{i} m_i$$

I - DISTRUBITION DE LA MASSE AU SEIN D'UN SOLIDE

Considérons maintenant la forme géométrique du solide :

a) **<u>Si le solide est « volumineux » de volume V : (sphère, cylindre,…)</u>**

L'élément qui entoure chaque point M du solide est un élément de volume dV, tel que $\int_{(S)} dV = V$. Soit alors ρ **la densité volumique de masse** : $dm = \rho dV$

$$m = \int_{(S)} dm = \int_{(S)} \rho \, dV$$

Si (S) est homogène ($\rho = cte$), alors :

$$m = \int_{(S)} dm = \int_{(S)} \rho \, dV = \rho \int_{(S)} dV = \rho . V$$

Ce qui donne :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Pr. Chaabelasri / chaabelasri@gmail.com

I - DISTRUBITION DE LA MASSE AU SEIN D'UN SOLIDE

b) Si le solide est « surfacique » de surface S : (Disque, plaque, etc.)

L'élément qui entoure chaque point M du solide est un élément de surface dS, tel que $\int_{(S)} d\,S = S$. Soit alors σ **la densité surfacique de masse** : $dm = \sigma\, dS$

$$m = \int_{(S)} dm = \int_{(S)} \sigma\, dS$$

Si (S) est homogène ($\sigma = cte$), alors :

$$m = \int_{(S)} dm = \int_{(S)} \sigma\, dS = \sigma \int_{(S)} dS = \sigma . S$$

Ce qui donne :

$$\sigma = \frac{m}{S}$$

Pr. Chaabelasri / chaabelasri@gmail.com

c) **Si le solide est « linéique » de longueur L : (Barre, cerceau, etc.)**

L'élément qui entoure chaque point M du solide est un élément de longueur dL, tel que $\int_{(S)} dL = L$. Soit alors λ **la densité linéique de masse** : $dm = \lambda\, dL$

$$m = \int_{(S)} dm = \int_{(S)} \lambda\, dL$$

Si (S) est homogène ($\lambda = cte$), alors :

$$m = \int_{(S)} dm = \int_{(S)} \lambda\, dL = \lambda \int_{(S)} dL = \lambda . L$$

Ce qui donne :

$$\lambda = \frac{m}{L}$$

II - CENTRE DE MASSE (OU CENTRE D'INERTIE) D'UN SOLIDE :

Soit un solide (S) de masse m, et M un point de (S). L'élément qui entoure M a une masse dm. Suivant la forme géométrique du solide, nous avons :

$$d\,m = \rho\, dV \quad ou \quad d\,m = \sigma\, dS \quad ou \quad d\,m = \lambda\, dL$$

Définition :

On appelle « ***centre d'inertie*** » ou « ***centre des masses*** » du solide (S) le point G tel que :

$$\int_{(S)} \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$$

Question 1: Exprimer le centre d'inertie G dans un repère $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?

II - CENTRE DE MASSE (OU CENTRE D'INERTIE) D'UN SOLIDE :

Soit $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct **lié ou non lié** au solide :

$$\int_{(S)} \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \int_{(S)} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM})\, dm = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{(S)} \overrightarrow{OM}\, dm$$

Avec : $d\,m = \rho\, dV \quad ou \quad d\,m = \sigma\, dS \quad ou \quad d\,m = \lambda\, dL$ (suivant la forme géométrique du solide)

Si (S) est homogène :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V} \int_{(S)} \overrightarrow{OM}\; dV \quad ou \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \int_{(S)} \overrightarrow{OM}\; dS \quad ou \quad = \frac{1}{L} \int_{(S)} \overrightarrow{OM}\; dL$$

Question 2: Trouver l'expression des coordonnées de G dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

II - CENTRE DE MASSE (OU CENTRE D'INERTIE) D'UN SOLIDE :

Coordonnées de G dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

Soit (x, y, z) les coordonnées d'un point M de (S) , et (x_G, y_G, z_G) les coordonnées du point G par rapport à la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{OM} = \left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right._{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})} \quad et \quad \vec{OG} = \left|\begin{matrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{matrix}\right._{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

D'où l'on déduit

$$x_G = \frac{1}{m}\int_S x\,dm \qquad y_G = \frac{1}{m}\int_S y\,dm \qquad z_G = \frac{1}{m}\int_S z\,dm$$

suivant la forme géométrique du solide

$$x_G = \frac{1}{V}\int_S x\,dV \quad ou \quad x_G = \frac{1}{S}\int_S x\,dS \quad ou \quad x_G = \frac{1}{L}\int_S x\,dL$$

$$y_G = \frac{1}{V}\int_S y\,dV \quad ou \quad y_G = \frac{1}{S}\int_S y\,dS \quad ou \quad y_G = \frac{1}{L}\int_S y\,dL$$

$$z_G = \frac{1}{V}\int_S z\,dV \quad ou \quad z_G = \frac{1}{S}\int_S z\,dS \quad ou \quad z_G = \frac{1}{L}\int_S z\,dL$$

II - CENTRE DE MASSE (OU CENTRE D'INERTIE) D'UN SOLIDE :

Remarque pratique :

1- Si le solide (S) admet un point (ou un axe ou un plan) de symétrie matérielle (symétrie géométrique et massique), alors son centre d'inertie G se trouve en ce point (ou sur cet axe ou dans ce plan).

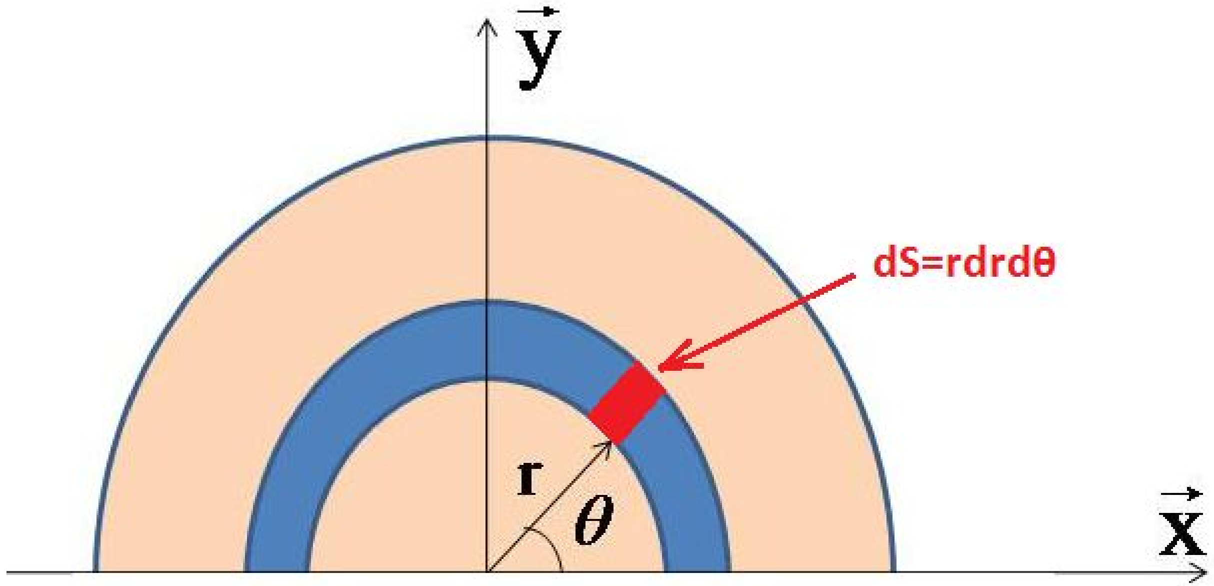
2- **Centre d'inertie d'un système matériel formé par plusieurs solides:**

Soit un système matériel (Σ) formé par n solides (S_i) de masse m_i et de centre d'inertie G_i (respectivement). Le centre d'inertie G du système matériel (Σ) est tel que :

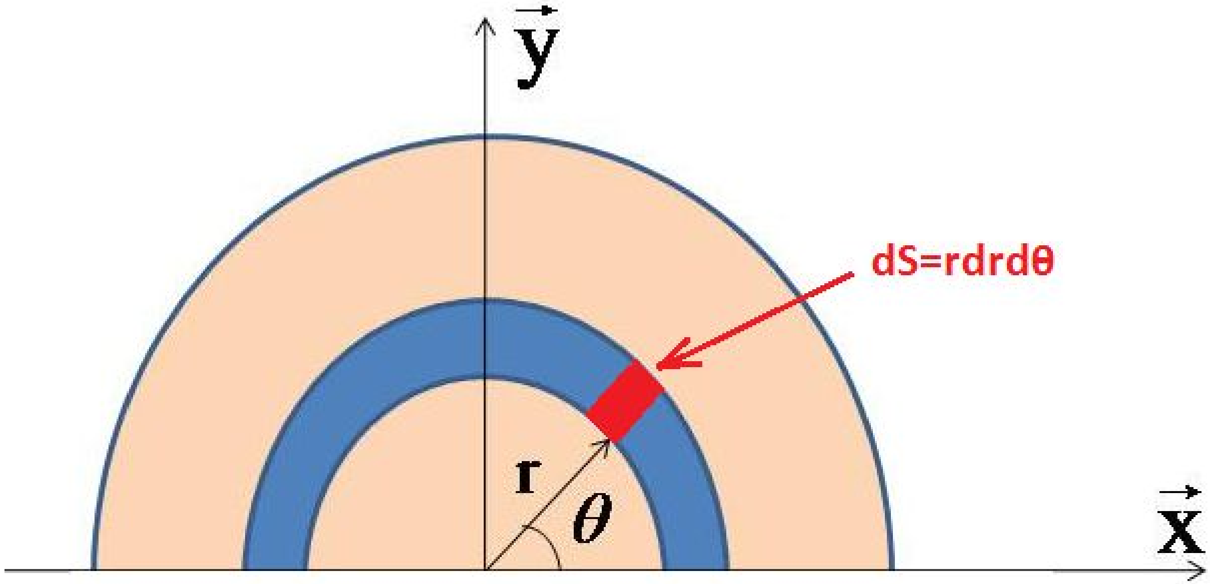
$$\sum_i (m_i)\vec{OG} = \sum_i (m_i\vec{OG_i}) \qquad ou \qquad \vec{OG} = \frac{1}{\sum_i (m_i)} \sum_i (m_i\vec{OG_i})$$

Exemple :

Trouver le centre d'inertie du demi-disque homogène de rayon R



Solution :



Le centre d'interie est le point $G\,(0, \frac{4R}{3\pi})$

III - OPERATEUR D INERTIE – MATRICE D’INERTIE.

III-1) Moments d’inertie d’un solide.

Discusion :

Le moment d’inertie est une grandeur qui quantifie la masse et la forme d’un solide. En rotation, plus le moment d'inertie est faible plus sa vitesse est grande.

III - OPERATEUR D INERTIE – MATRICE D'INERTIE.

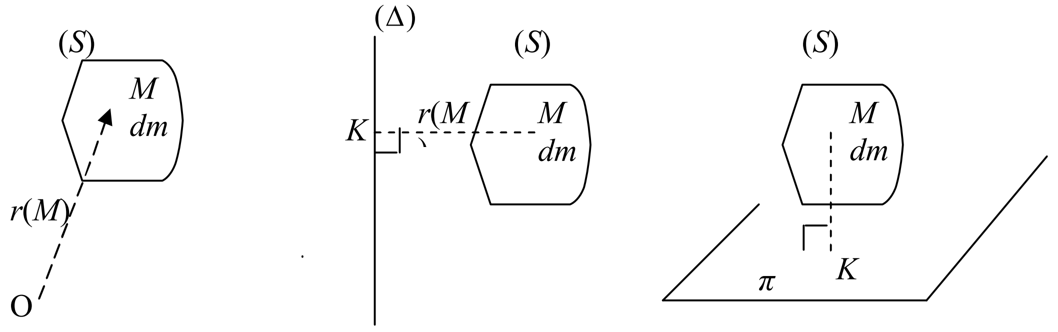
III-1) Moments d'inertie d'un solide.

Définition :

On appelle « ***moment d'inertie*** » d'un solide (S) par rapport à un point O (ou un axe (Δ) ou un plan π), la quantité scalaire :

$$\mathrm{I}^{S}_{o,\Delta,\pi} = \int_{(S)} r^2(M)\,dm$$

Où $r(M)$ est la distance entre le point M et le point O, l'axe (Δ) ou le plan π (voir *schéma*).



III-1) Moments d'inertie d'un solide.

Autre écriture :

- par rapport au point O

$$\mathrm{I}_{o}^{S} = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM}^{2} \, dm$$

- par rapport à la droite (Δ)

$$\mathrm{I}_{\Delta}^{S} = \int_{M \in S} \overrightarrow{KM}^{2} \, dm$$

- par rapport au plan π

$$\mathrm{I}_{\pi}^{S} = \int_{M \in S} \overrightarrow{KM}^{2} \, dm$$

III - OPERATEUR D INERTIE – MATRICE D'INERTIE.

III-2) Moments et produits d'inertie d'un solide par rapport aux axes d'un repère lié à ce solide :

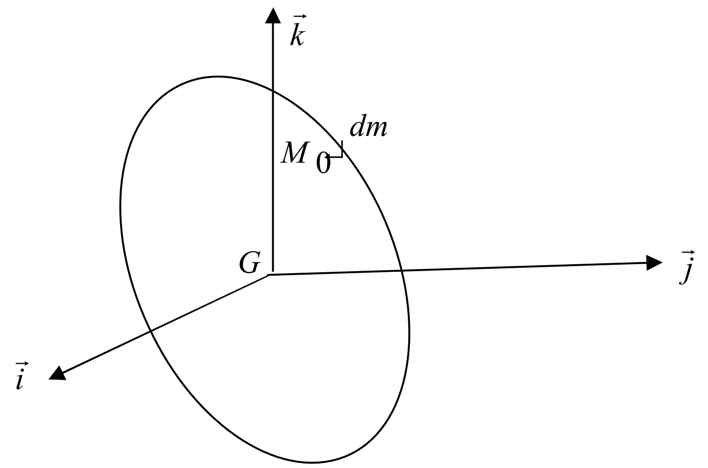
Soit (S) un solide homogène de masse **m** et de centre d'inertie **G**. Soit $\Re = (G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct lié au solide. Soit M un point quelconque du solide, tel que : $G\vec{M} = \left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right._{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$

Suivant la forme géométrique :

$$d\,m = \rho\, dV = \frac{m}{V} d\,V \quad \text{ou}$$

$$d\,m = \sigma\, dS = \frac{m}{S} d\,S \quad \text{ou}$$

$$d\,m = \lambda\, dL = \frac{m}{L} d\,L$$



III - OPERATEUR D INERTIE – MATRICE D'INERTIE.

III-2) Moments et produits d'inertie d'un solide par rapport aux axes d'un repère lié à ce solide :

Définitions :

On sait que le carré de la distance entre le point M et l'axe $(G,\vec{k})$, (ou l'axe $(G,\vec{i})$, ou l'axe $(G,\vec{j})$) est respectivement: $x^2 + y^2$ (ou $y^2 + z^2$ ou $y^2 + z^2$), ainsi :

Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(G,\vec{i})$: $A = I^S_{G,\vec{i}} = \int_S (y^2 + z^2) dm$

Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(G,\vec{j})$: $B = I^S_{G,\vec{j}} = \int_S (z^2 + x^2) dm$

Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(G,\vec{k})$: $C = I^S_{G,\vec{k}} = \int_S (x^2 + y^2) dm$

III-2) Moments et produits d'inertie d'un solide par rapport aux axes d'un repère lié à ce solide :

Remarque :

le moment d'inertie du solide par rapport au point G est la demi-somme des trois moments d'inertie précédents :

$$I_G^S = \int_S (x^2 + y^2 + z^2)\, d\,m = \frac{1}{2}\left[I^S_{G,\vec{i}} + I^S_{G,\vec{j}} + I^S_{G,\vec{k}} \right]$$

III-2) Moments et produits d'inertie d'un solide par rapport aux axes d'un repère lié à ce solide :

Produits d'inertie du solide par rapport aux 3 axes du repère:

$$D = -\int_S x\,y\,dm \qquad E = -\int_S x\,z\,dm \qquad F = -\int_S y\,z\,dm$$

Matrice d'inertie du solide au point G, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **:**

$$M^S_{(G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$$

Avec :

Les termes diagonaux sont les moments d'inertie,

Les termes non diagonaux sont les produits d'inertie.

C'est une matrice symétrique.

NB : On verra, dans la suite de ce chapitre, l'utilité de cette matrice d'inertie.

III - OPERATEUR D INERTIE – MATRICE D'INERTIE.

III-2) Moments et produits d'inertie d'un solide par rapport aux axes d'un repère lié à ce solide :

Repère principal d'inertie :

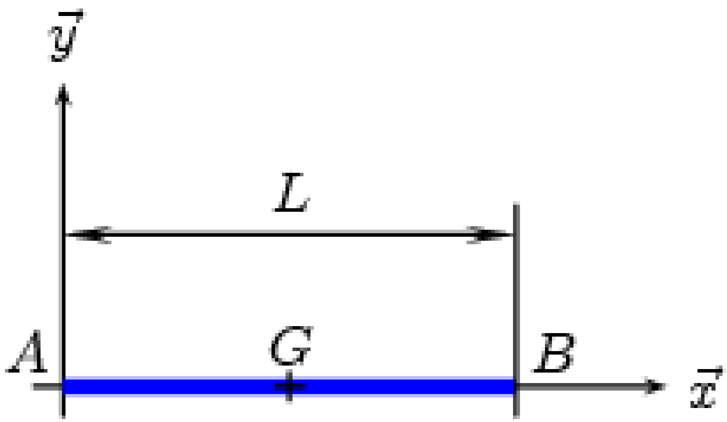
Notons seulement que si les axes $(G,\vec{i})$, $(G,\vec{j})$ et $(G,\vec{k})$ sont des axes de symétrie matérielle, alors les produits d'inertie sont nulle. D = E = F = 0

Dans ce cas on dit que le repère $\Re = (G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère principal d'inertie et les moments A, B et C sont les moments principaux d'inertie du solide.

III-2) Moments et produits d’inertie d’un solide par rapport aux axes d’un repère lié à ce solide :

Exemples

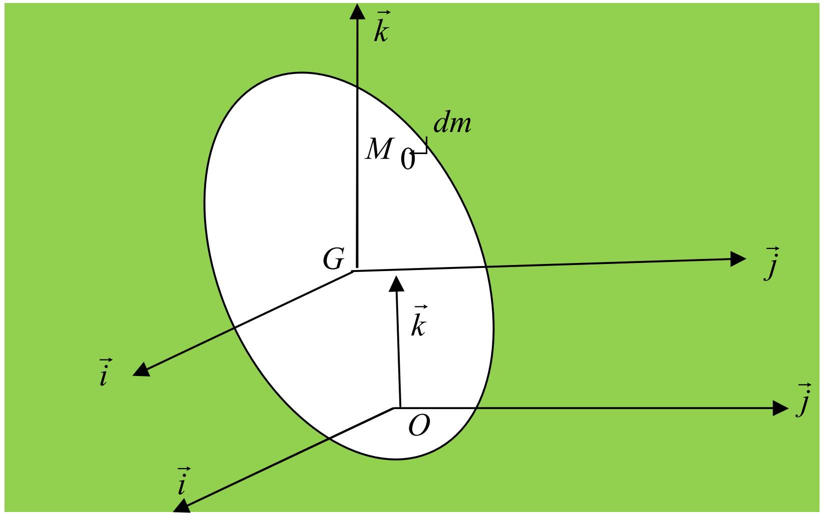
Trouver la matrice d’inertie $M^{S}_{(G,\vec{i},\vec{j})}$ d’une tige AB de longueure L et de masse M :



III-2) Moments et produits d'inertie d'un solide par rapport aux axes

Remarques:

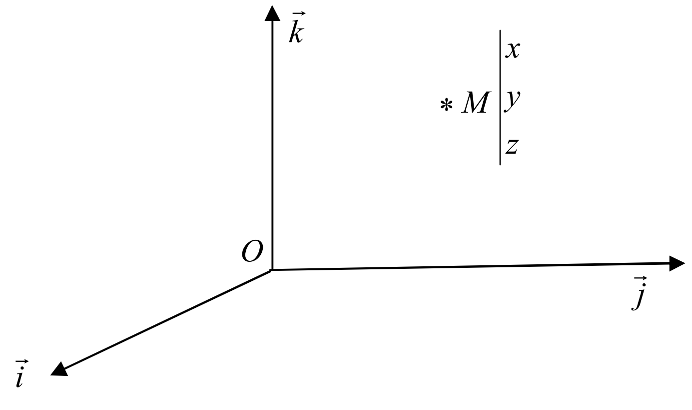
1) Si au lieu de choisir l'origine du repère au point G, on la choisit en un autre point O appartenant, ou non appartement, au solide :



On définit les moments d'inertie, les produits d'inertie par rapport aux axes $(O,\vec{i})$, $(O,\vec{j})$ et $(O,\vec{k})$, ainsi que la matrice d'inertie du solide, au point **O** et dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$**.** Mais ici x, y et z sont les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{OM}$ (et non $\vec{GM}$ comme précédemment).

III-2) Moments et produits d'inertie d'un solide par rapport aux axes d'un repère lié à ce solide :

2) Si on prend un point matériel **P** de masse **m** et un repère $\Re = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



Le moment d'inertie du point P par rapport à l'axe $(G,\vec{i})$, $(G,\vec{j})$ et $(G,\vec{k})$:

$Ixx = I^P_{O,\vec{i}} = m(y^2+z^2)$; $Iyy = I^P_{O,\vec{j}} = m(z^2+x^2)$; $Izz = I^P_{O,\vec{k}} = m(x^2+y^2)$

Les produits d'inertie du point P par rapport aux 3 axes du repère :

$Ixy = -m\,x\,y$; $Ixz = -m\,x\,z$; $Iyz = -m\,y\,z$

La Matrice d'inertie du Point P, au point O, dans la base est :

$$M^S_{(G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = \begin{bmatrix} Ixx & Ixy & Ixz \\ Ixy & Iyy & Iyz \\ Ixz & Iyz & Izz \end{bmatrix}$$

III-2) Moments et produits d'inertie d'un solide par rapport aux axes d'un repère lié à ce solide :

3- **Matrice d'inertie d'un solide composé de plusieurs solides :**

$$M^{S}_{(G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = M^{S1}_{(G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} + M^{S2}_{(G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} + \ldots$$

III - OPERATEUR D INERTIE – MATRICE D'INERTIE

III-3) Opérateur d'inertie d'un solide en un point quelconque

(S) est un solide de masse m. Soient M un point de (S), tel que l'élément qui l'entoure est d'une masse dm, et O un point quelconque.

On appelle **« *opérateur d'inertie* »** en O, du solide (S), l'application vectorielle qui à tout vecteur $\vec{u}$, fait correspondre le vecteur:

$$\vec{\mathrm{J}}_O^S(\vec{u}) = -\int_S \vec{OM} \wedge (\vec{OM} \wedge \vec{u})\, d\,m$$

III-3) Opérateur d'inertie d'un solide en un point quelconque

Propriétés :

a) **Linéarité :** L'opérateur d'inertie est une application « ***linéaire*** ».

Càd pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques, et λ et μ deux réels, on a

$$\vec{J}_O^S(\vec{u}) = -\int_S \vec{OM} \wedge (\vec{OM} \wedge \vec{u})dm$$

$$\vec{J}_O^S(\vec{v}) = -\int_S \vec{OM} \wedge (\vec{OM} \wedge \vec{v})dm$$

$\vec{J}_O^S$ est une application linéaire =>

$$\vec{J}_O^S(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \vec{J}_O^S(\vec{u}) + \mu \vec{J}_O^S(\vec{v})$$

Démonstration ?

III-3) Opérateur d’inertie d’un solide en un point quelconque

a) Symétrie.

L’opérateur $\vec{J}_O^S$ est dit symétrique si quelque soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\vec{u}\,.\,\vec{J}_O^S(\vec{v}) = \vec{v}\,.\,\vec{J}_O^S(\vec{u})$$

Démonstration ?

III-3) Opérateur d’inertie d’un solide en un point quelconque

Pour cela considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques, et calculons le premier membre de l’égalité précédente

$$\vec{u}.\vec{J}_O^S(\vec{v}) = -\vec{u}.\int_S \vec{OM}\wedge(\vec{OM}\wedge\vec{v})dm = -\int_S \vec{u}.[\vec{OM}\wedge(\vec{OM}\wedge\vec{v})]dm$$

$$= -\int_S [\vec{OM}\wedge(\vec{OM}\wedge\vec{v})].\vec{u}\,dm = -\int_S (\vec{u}\wedge\vec{OM}).(\vec{OM}\wedge\vec{v})]dm$$

$$= -\int_S \vec{v}.[(\vec{u}\wedge\vec{OM})\wedge\vec{OM}]\,dm = -\vec{v}.\int_S \vec{OM}\wedge(\vec{OM}\wedge\vec{u})dm$$

$$= \vec{v}.\vec{J}_O^S(\vec{u})$$

Donc : $\vec{u}.\vec{J}_O^S(\vec{v}) = \vec{v}.\vec{J}_O^S(\vec{u})$ L’opérateur $\vec{J}_O^S$ est « ***symétrique*** ».

ENSAH
Pr. Chaabelasri / chaabelasri@gmail.com

III-3) Opérateur d'inertie d'un solide en un point quelconque

Conclusion :

L'opérateur d'inertie est une grandeur vectorielle, linéaire et symétrique. Alors dans un repère orthonormé direct $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il peut être représenté par une matrice symétrique notée $\mathbf{M}^{S}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$.

Alors $\forall \ \vec{u}$, on peut écrire :

$$\vec{\mathbf{J}}^{S}_{O}(\vec{u}) = \mathbf{M}^{S}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} . \vec{u}$$

NB : On verra ci-dessous que cette matrice correspond, en fait, à la matrice d'inertie du solide, au point O et dans la base $\Re = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

III-3) Opérateur d'inertie d'un solide en un point quelconque

Cas particulier : point matériel.

Quand il s'agit d'un point matériel *P*, de masse *m*, on appelle opérateur d'inertie de la particule *P* en un point O quelconque, l'opérateur qui à tout vecteur $\vec{u}$ fait associer

$$\vec{\mathrm{J}}_O^P(\vec{u}) = -\,m\,\overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u})$$

III-3) Opérateur d'inertie d'un solide en un point quelconque

Détermination des coefficients de la matrice $\mathbf{M}^{S}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$:

Dans une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un vecteur $\vec{u}$ quelconque est donné par ses composantes $\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ et le point M du solide est repéré par $\vec{OM}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

Posons $\mathbf{M}^{S}_{oxyz}=\begin{bmatrix}A & D & E\\D & B & F\\E & F & C\end{bmatrix}$

III - OPERATEUR D INERTIE – MATRICE D'INERTIE

III-3) Opérateur d'inertie d'un solide en un point quelconque

Détermination des coefficients de la matrice $M^S_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$:

Calcul de $\vec{J}^S_O(\vec{u})$:

$$\vec{J}^S_O(\vec{u}) = -\int_{(S)} \vec{OM} \wedge (\vec{OM} \wedge \vec{u})dm = -\int_{(S)} (\vec{OM}.\vec{u})\vec{OM}\, dm + \int_{(S)} (\vec{OM}.\vec{OM})\vec{u}\, dm$$

$$= -\int_{(S)} (\vec{OM}.\vec{u})\vec{OM}\, dm + \int_{(S)} \left|\vec{OM}\right|^2 \vec{u}\, dm$$

Avec :

$$(\vec{OM}.\vec{u})\vec{OM} = (xu_1 + yu_2 + zu_3)\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \text{Et} \quad \left|\vec{OM}\right|^2.\vec{u} = (x^2+y^2+z^2)\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}$$

Après tout calcul fait, on obtient :

$$\vec{J}^S_O(\vec{u}) = -\int_{(S)} \vec{OM} \wedge (\vec{OM} \wedge \vec{u})dm = \begin{bmatrix} \left[\int_S (y^2+z^2)\, dm\right]u_1 + \left[-\int_S xy\, dm\right]u_2 + \left[-\int_S xz\, dm\right]u_3 \\ \left[-\int_S xy\, dm\right]u_1 + \left[\int_S (x^2+z^2)\, dm\right]u_2 + \left[-\int_S yz\, dm\right]u_3 \\ \left[-\int_S xz\, dm\right]u_1 + \left[-\int_S yz\, dm\right]u_2 + \left[\int_S (x^2+y^2)\, dm\right]u_3 \end{bmatrix}$$

III-3) Opérateur d'inertie d'un solide en un point quelconque

Détermination des coefficients de la matrice $\mathbf{M}^S_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$:

D'autre part :

$$\vec{\mathbf{J}}^S_O(\vec{u}) = \mathbf{M}^S_{oxyz}.\vec{u} = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Au_1 + Du_2 + Eu_3 \\ Du_1 + Bu_2 + Fu_3 \\ Eu_1 + Fu_2 + Cu_3 \end{bmatrix}$$

On vérifie, donc, bien que :

$$A = I^S_{O,\vec{i}} = \int_S (y^2 + z^2)d\,m \;\; ; \quad B = I^S_{O,\vec{j}} = \int_S (z^2 + x^2)d\,m \qquad C = I^S_{G,\vec{k}} = \int_S (x^2 + y^2)d\,m$$

Et

$$E = -\int_S x\,y\,d\,m \quad ; \quad F = -\int_S x\,z\,d\,m \quad ; \quad E = -\int_S y\,z\,d\,m$$

En résumé :

$\forall \vec{u}$ Nous avons : $\vec{\mathbf{J}}^S_O(\vec{u}) = -\int_{(S)} \vec{OM} \wedge (\vec{OM} \wedge \vec{u})dm = \mathbf{M}^S_{oxyz}.\vec{u}$

III-4) Théorème d'Huygens généralisé :

Soit (S) un solide homogène de masse **m** et de centre d'inertie **G**. Soit une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et O un point quelconque :

« La matrice d'inertie en un point O (arbitraire), d'un solide (*S*) de masse *m*, est égale à la somme de la matrice d'inertie du solide au point G et la matrice d'inertie du point G, affecté de la masse totale m, au point O »

$$\mathbf{M}^{S}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = \mathbf{M}^{S}_{(G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} + \mathbf{M}^{G,m}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

III-4) Théorème d'Huygens généralisé :

Démonstration :

Soit (*S*) un solide de masse *m*. et soit *M* un point de (*S*) dont l'élément qui l'entoure ayant comme masse *dm*. On note ainsi, par *G* le centre d'inertie, et par O un point quelconque. Et on écrit alors

$$\forall\ \vec{u} \qquad \vec{J}_O^S(\vec{u}) = -\int_S \vec{OM}\wedge(\vec{OM}\wedge\vec{u})dm$$

$$= -\int_S [\vec{OG}+\vec{GM}]\wedge[(\vec{OG}+\vec{GM})\wedge\vec{u}]dm$$

$$= [-\int_S \vec{OG}\wedge(\vec{OG}\wedge\vec{u})dm]+[-\int_S \vec{GM}\wedge(\vec{OG}\wedge\vec{u})dm]+[-\int_S \vec{OG}\wedge(\vec{GM}\wedge\vec{u})dm]+[-\int_S \vec{GM}\wedge(\vec{GM}\wedge\vec{u})dm]$$

$$= \qquad [1] \qquad + \qquad [2] \qquad + \qquad [3] \qquad + \qquad [4]$$

III-4) Théorème d'Huygens généralisé :

Avec :

$$[1] = -\int_S \vec{OG}\wedge(\vec{OG}\wedge\vec{u})dm = -\vec{OG}\wedge(\vec{OG}\wedge\vec{u})\int_S dm = -m\vec{OG}\wedge(\vec{OG}\wedge\vec{u}) = \vec{J}_O^{G,m}(\vec{u})$$

$$[2] = -\int_S \vec{GM}\wedge(\vec{OG}\wedge\vec{u})dm = -[\int_S \vec{GM}\,dm]\wedge(\vec{OG}\wedge\vec{u}) = \vec{0}$$

$$[3] = -\int_S \vec{OG}\wedge(\vec{GM}\wedge\vec{u})dm = -\vec{OG}\wedge[\int_S \vec{GM}\,dm\wedge\vec{u}] = \vec{0}$$

$$[4] = -\int_S \vec{GM}\wedge(\vec{GM}\wedge\vec{u})dm = \vec{J}_G^S(\vec{u})$$

Donc :

$$\forall\vec{u}\quad \vec{J}_O^S(\vec{u}) = \vec{J}_G^S(\vec{u}) + \vec{J}_O^{G,m}(\vec{u})$$

Soit la base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. La relation précédente peut s'écrire sous la forme : $\mathbf{M}^S_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}.\vec{u} = \mathbf{M}^S_{(G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}.\vec{u} + \mathbf{M}^{G,m}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}.\vec{u}$. Ceci est vrai quel que soit le vecteur $\vec{u}$,

et donc : $\mathbf{M}^S_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = \mathbf{M}^S_{(G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} + \mathbf{M}^{G,m}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$

III-4) Expression de I_{Δ}^{S} en fonction de l'opérateur d'inertie.

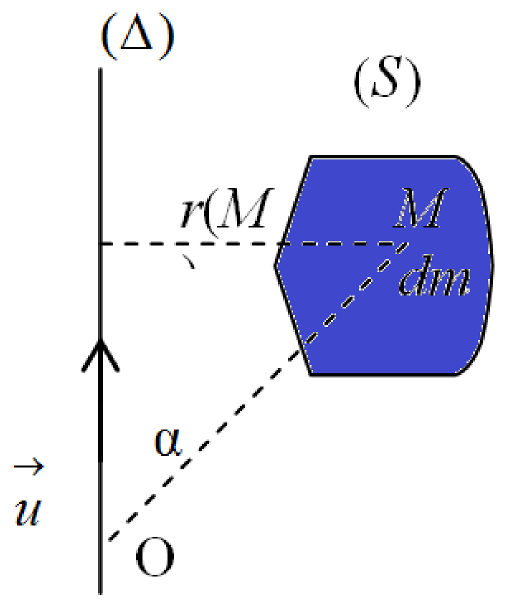
Soient (*S*) un solide de masse *m*. *M* un point de (*S*) dont l'élément qui l'entoure ayant comme masse *dm* et (Δ) un axe quelconque. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire porté par cet axe, et O l'un de ses points quelconque. Soit un repère orthonormé direct $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\left|\vec{OM} \wedge \vec{u}\right| = \left|\vec{OM}\right| . \left|\vec{u}\right| . \left|\sin\alpha\right|$$

$$= \left|\vec{OM}\right| . \left|\sin\alpha\right|$$

$$= \left|\vec{OM}\right| \frac{\left|\vec{r}(M)\right|}{\left|\vec{OM}\right|}$$

$$= \left|\vec{r}(M)\right|$$



Pr. Chaabelasri / chaabelasri@gmail.com

III-4) Expression de I_{Δ}^{S} en fonction de l'opérateur d'inertie.

Ce qui donne

$$\left|\vec{r}(M)\right|^2 = \left|\vec{OM}\wedge\vec{u}\right|^2 = \left|\vec{u}\wedge\vec{OM}\right|^2$$

Ou tout simplement

$$(\vec{OM}\wedge\vec{u})^2 = (\vec{OM}\wedge\vec{u}).(\vec{OM}\wedge\vec{u}) = [(\vec{OM_1}+\vec{M_1M})\wedge\vec{u}].[(\vec{OM_1}+\vec{M_1M})\wedge\vec{u}]$$

$$= (\vec{M_1M}\wedge\vec{u}).(\vec{M_1M}\wedge\vec{u}) = \vec{r}^{\,2} = r^2 \quad \text{car} \quad (\vec{OM_1} // \vec{u}) \quad \text{et} \quad (\vec{M_1M}\perp\vec{u})$$

III-4) Expression de I_{Δ}^{S} en fonction de l'opérateur d'inertie.

ce qui justifie pour K =O, l'égalité :

$$I_{\Delta}^{S} = \int_{M\in S} \vec{r}^{\,2}(M)dm = \int_{M\in S} (\vec{u}\wedge \vec{KM})^2 dm$$

Par suite

$$\left|\vec{r}(M)\right|^2 = \left|\vec{OM}\wedge\vec{u}\right|^2 = (\vec{OM}\wedge\vec{u}).(\vec{OM}\wedge\vec{u})$$

En plus, on démontre que $\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de l'espace vectoriel, on a :

$$\vec{u}.(\vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{v})) = (\vec{u}\wedge\vec{v}).(\vec{w}\wedge\vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad r^2(M) = (\vec{u}\wedge\vec{OM}).(\vec{u}\wedge\vec{OM}) = \vec{u}.[\vec{OM}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{OM})] = -\vec{u}.[\vec{OM}\wedge(\vec{OM}\wedge\vec{u})]$$

III-4) Expression de I_{Δ}^{S} en fonction de l'opérateur d'inertie.

Et par conséquent

$$\mathrm{I}_{\Delta}^{S} = \int_{(S)} r^2(M)dm = \int_{(S)} -\vec{u}.[(\vec{OM} \wedge (\vec{OM} \wedge \vec{u})]dm$$

$$= \vec{u}.\int_{(S)} -[(\vec{OM} \wedge (\vec{OM} \wedge \vec{u})]dm = \vec{u}.\vec{\mathbf{J}}_{O}^{S}(\vec{u})$$

D'où :

$$\mathrm{I}_{\Delta}^{S} = \vec{u}.\vec{\mathrm{J}}_{O}^{S}.(\vec{u}) = \vec{u}.\mathbf{M}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}^{S}.\vec{u} \qquad (3.9)$$

III-4) Expression de I_{Δ}^{S} en fonction de l'opérateur d'inertie.

Conséquences :

D'après le théorème d'Huygens Koenig, on a

$$\forall \vec{u} \quad \vec{J}_O^S(\vec{u}) = \vec{J}_G^S(\vec{u}) + \vec{J}_O^{G,m}(\vec{u})$$

Pour $\vec{u}$ unitaire porté par (Δ) , on écrit

$$\vec{u}.\vec{J}_O^S(\vec{u}) = \vec{u}.\vec{J}_G^S(\vec{u}) + \vec{u}.\vec{J}_O^{G,m}(\vec{u})$$

Soit (Δ_G) une droite passant par le point G et parallèle à (Δ) (donc elle orientée par le même vecteur unitaire $\vec{u}$). Nous déduisons que :

$$I_{\Delta}^{S} = I_{\Delta_G}^{S} + I_{\Delta}^{[G]} = I_{\Delta_G}^{S} + md^2$$

III-4) Expression de I_{Δ}^{S} en fonction de l'opérateur d'inertie.

Théorème d'Huygens:

Soit un solide (S) de masse **m** et de centre d'inertie G. Soit D une droite quelconque. Soit D_G une droite parallèles à *D* et qui passe par le point G. Soit **d** la distance entre les deux droites. Alors nous avons :

$$\mathrm{I}_{D}^{S} = \mathrm{I}_{D_G}^{S} + m\,d^2$$